

佐賀大農彙 (Bull. Fac. Agr., Saga Univ.) 63 : 97~104 (1987)

## 地盤表面における円形基礎の極限支持力

甲 本 達 也・林 重 徳\*

(農業造構学教室)

昭和62年4月30日 受理

### Ultimate Bearing Capacity of Circular Flat Footings on the Ground.

Tatsuya KOUMOTO and Shigenori HAYASHI

(Laboratory of Construction Engineering)

*Received April 30, 1987*

#### Summary

A three-dimensional mechanism of the ultimate bearing capacity of circular flat footings on  $c-\phi$  soil is analyzed on the basis of plastic theory under the condition of axial-symmetry. The soil is considered as a perfectly rigid plastic material obeying the Mohr-Coulomb failure criterion. The stress field is assumed to satisfy the Haar-von Kármán condition.

The results of the analysis are presented as bearing capacity factors in terms of the friction angle  $\phi$  and the roughness of footing base. The theoretical values obtained earlier from other researchers are found to agree closely with the present theoretical bearing capacity factors.

#### 緒 言

地盤表面に設置された円形基礎の極限支持力  $q_r$  は解の重ね合せ法則が成り立つと仮定すると Terzaghi<sup>1)</sup>の帯状基礎の極限支持力式と同様に次式で表される。

$$q_r = cN_{cr} + p_0N_{qr} + \frac{\gamma(2R)}{2}N_{\gamma r} \quad (1)$$

ここで  $c$  は土の粘着力,  $p_0$  は地表面における上載圧,  $\gamma$  は土の単位体積重量,  $R$  は円形基礎の半径,  $N_{cr}$ ,  $N_{qr}$  及び  $N_{\gamma r}$  はそれぞれ粘着力, 上載圧及び土の自重に基づく支持力係数である。  $N_{cr}$  及び  $N_{qr}$  は土の内部摩擦角  $\phi$  及び基礎底面の粗度の関数であり,  $N_{\gamma r}$  はこれらの因子の他に土の自重に関係した項 ( $\gamma R/c$ ) の関数である。

通常, 円形基礎 (三次元) の支持力係数は Terzaghi<sup>1)</sup>や Caquot ら<sup>2)</sup>の帯状基礎 (二次元) の支持力係数に形状係数を乗じて補正したものが多く用いられている。しかし円形基礎の支持力

\* 九州大学工学部水工土木学科



ここで  $w = \frac{\sigma_m}{c} \cos \phi - \sin \phi$ 、-及び+はそれぞれ  $s_1$

及び  $s_2$  すべり線を表している。

## 2 数 値 解 法

Fig. 2 は  $(r, z)$  座標におけるすべり線網の一部であり、 $(i, j-1)$  点および  $(i-1, j)$  点の各値から  $(i, j)$  点の値を求めるための説明図である。 $(i, j)$  点の  $r_{i,j}$  及び  $z_{i,j}$  の第 1 次近似  $r_1$  及び  $z_1$  は(5)式を直接差分化した次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} z_{i,j-1} - z_1 &= (r_{i,j-1} - r_1) \tan \theta_{i,j-1} \\ z_1 - z_{i-1,j} &= (r_{i-1,j} - r_1) \tan \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \theta_{i-1,j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

さらに  $(i, j)$  点における  $w_{i,j}$  及び  $\theta_{i,j}$  の第 1 次近似値  $w_1$  及び  $\theta_1$  は(6)式を差分化した次式と(7)式とより求められる<sup>5, 6, 7, 8)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} w_1 - w_{i,j-1} - \left\{ (w_1 + w_{i,j-1}) \tan \phi + \frac{2}{\cos \phi} \right\} \{ (\theta_1 - \theta_{i,j-1}) + A_1 \} \\ - \frac{\gamma R}{c} \left\{ \frac{(z_1 - z_{i,j-1}) \cos \phi - (r_1 - r_{i,j-1}) \sin \phi}{R} \right\} &= 0 \\ w_1 - w_{i-1,j} - \left\{ (w_1 + w_{i-1,j}) \tan \phi + \frac{2}{\cos \phi} \right\} \{ (\theta_1 - \theta_{i-1,j}) + B_1 \} \\ - \frac{\gamma R}{c} \left\{ \frac{(z_1 - z_{i-1,j}) \cos \phi - (r_1 - r_{i-1,j}) \sin \phi}{R} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで  $A_1$  及び  $B_1$  は

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{-(r_1 - r_{i,j-1}) \cos \phi + (z_1 - z_{i,j-1})(1 - \sin \phi)}{r_1 + r_{i,j-1}} \\ B_1 &= \frac{(r_1 - r_{i-1,j}) \cos \phi + (z_1 - z_{i-1,j})(1 - \sin \phi)}{r_1 + r_{i-1,j}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$r_{i,j}$  及び  $z_{i,j}$  の第  $n$  次近似は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} z_{i,j-1} - z_n &= (r_{i,j-1} - r_n) \tan \left( \frac{\theta_{i,j-1} + \theta_{n-1}}{2} \right) \\ z_n - z_{i-1,j} &= (r_{i-1,j} - r_n) \tan \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{n-1}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで  $\theta_{n-1}$  は  $\theta_{i,j}$  の第  $(n-1)$  次近似である。 $w_{i,j}$  及び  $\theta_{i,j}$  の第  $n$  次近似は(8)式中の添字 1 を  $n$  に置き換えた式と(10)式とより求められる。(7)~(10)式を数値積分するに当り与えた境界条件は Fig. 3 を参照して以下の通り与えた。

- 1) AB 上:  $\theta = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ ,  $z = 0$ ,  $w = 1.0 + \frac{p_0}{c} \cos \phi (1 - \sin \phi)$
- 2) 点 A: 点 A のまわりの分割総数を  $N$  とすると、基礎底が滑な場合  $\theta_i = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \frac{\pi i}{2N}$ , 粗な場合  $\theta_i = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\phi}{2}\right) i / N$ ,  $w_i$  はいずれの場合も  $w_i = \frac{1}{2} \cot \phi \left[ \exp\{2(\theta_i - \alpha) \tan \phi\} - \frac{2}{\cos \phi} \right]$ , ただし  $\alpha = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cot \phi \log\{2(1 + \sin \phi) / \cos \phi\}$  である。

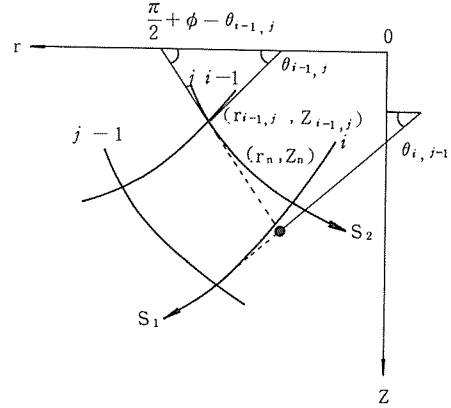


Fig. 2 Schematic  $r$ - $z$  grid

3) A 0 上:  $z=0$ ,  $A0=R=1.0$ , 基礎底

が滑な場合  $\theta=\psi=\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}(\tau_{rz}=0)$ ,

粗な場合  $\theta=\psi(\tau_{rz}>0)$  である.

### 計算結果及びその考察

計算結果の例を Fig. 4 (a), (b), (c) に示す. 図は  $\phi=30^\circ$ ,  $\gamma R/c=0.1$ ,  $p_0/c=0$  について得られたものであり, (a) は基礎下のすべり線網を, (b) は基礎底面上における接地圧分布を, (c) は同底面上におけるせん断応力分布をそれぞれ示している.

また図の対称軸の左半分は基礎底が滑な場合を, 右半分は粗な場合をそれぞれ表している.

図によればすべり線網は基礎底の粗度の影響を大きく受けるが, 基礎底面上の接地圧分布はあまり粗度の影響を受けないことがわかる (もちろん, せん断応力については基礎底面が滑な場合  $\tau_{rz}=0$  であり, 粗な場合  $\tau_{rz}>0$  であるので粗度の影響はあるが).

図には示していないが計算によれば, 同一の  $\phi$  において  $p_0/c$  の値を考慮してもすべり線網の大きさや形状には変化はないが,  $\gamma R/c$  の値が変化するとこれらはそれぞれ異なった性状を示した.

Fig. 5 はすべり線場の大きさや形状を表すパラメータとして Fig. 3 に示す塑性域図において  $0B/0A$  及び  $0E/0A$  を用い, これらの値が  $\phi$  に対してどのように変化するかを示したものである. ただし  $0E/0A$  の値は基礎底が粗な場合だけに存在する値である.

図によれば極限状態において地盤の水平方向に及ぶすべり線の影響範囲は  $\phi$  が大きくなる程, 基礎底が粗な程大となることがわかる. また基礎底が粗な場合に基礎下に生じるクルジュモフ核は  $\phi$  が大きくなるにつれて大となり, 核の先端角は鋭くなっていくことがわかる.

Fig. 6 はまた Fig. 3 に示す基礎底の主働域における  $\angle 0AE(=\phi)$  の値が  $\phi$  の変化につれてどのように変わるかを示したものである. 基礎

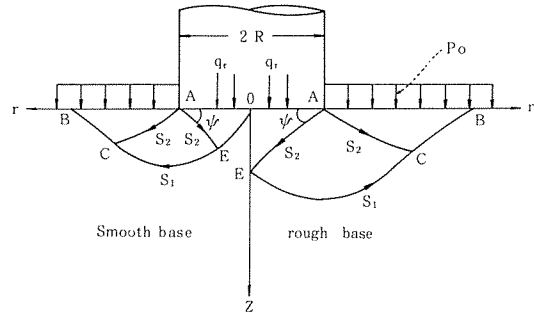
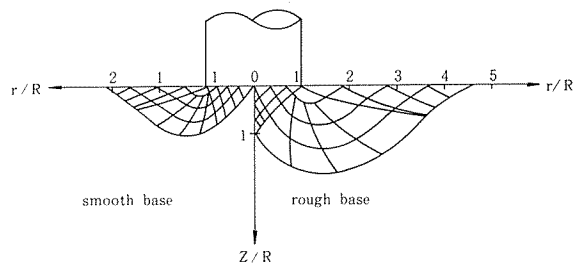
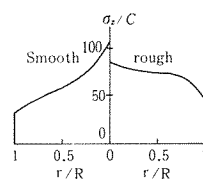


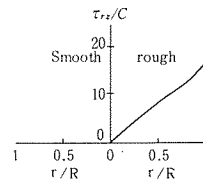
Fig. 3 Idealized plastic zones below circular flat footing base



(a) Slip line nets

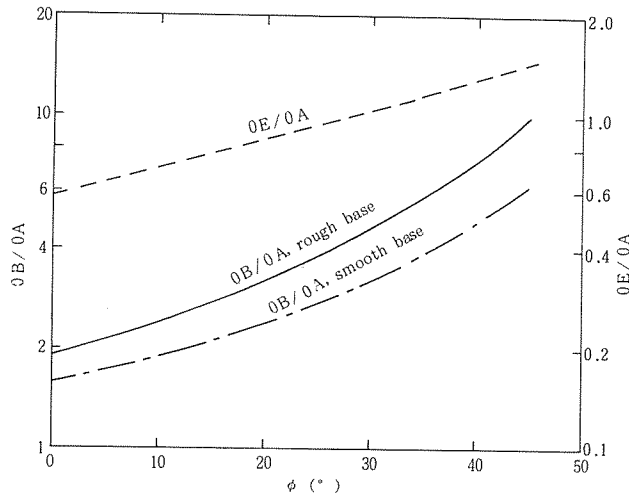
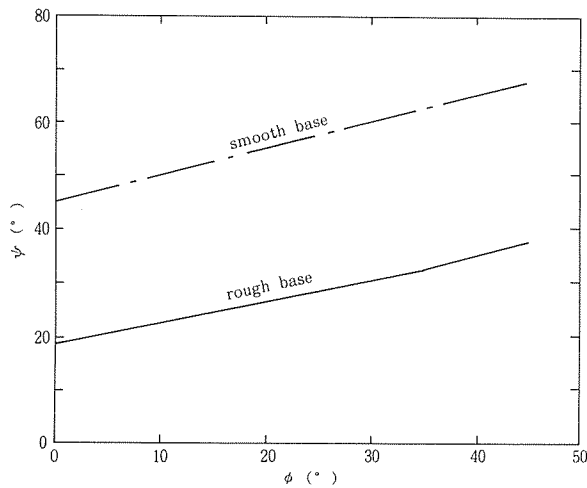


(b) Contact pressure distribution



(c) Shear stress distribution

Fig. 4 Calculated slip-line nets below footing base and contact pressure ( $\sigma_z/c$ ) and shear stress ( $\tau_{rz}/c$ ) distribution on footing base ( $\phi=30^\circ$ ,  $\gamma R/c=0.1$ ,  $p_0/c=0$ )


 Fig. 5 Calculated values of  $0B/0A$  and  $0E/0A$ 

 Fig. 6 Calculated values of  $\phi$ 

底が滑な場合は上述のごとく、 $\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  なる関係で表されるが、粗な場合は滑な場合のほぼ半分であることがわかる。これは二次元基礎の場合に Terzaghi<sup>11)</sup>が粗な場合に  $\phi = \phi$  としているのや Meyerhof<sup>9)</sup>が底面の粗度に関係なく底面が滑な場合の  $\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  としているのと大いに異なるものである。

Table 1 は計算により得られた各支持力係数  $N_{cr}$ 、 $N_{qr}$  及び  $N_{rr}$  の値を示したものである。こ

Table 1 Calculated values of bearing capacity factors,  $N_{cr}$ ,  $N_{qr}$  and  $N_{rr}$ 

$\phi$ (°)	smooth base			rough base		
	$N_{cr}$	$N_{qr}$	$N_{rr}$	$N_{cr}$	$N_{qr}$	$N_{rr}$
0	5.69	1.00	0.0	6.05	1.00	0.0
5	7.44	1.65	0.15	8.18	1.72	0.30
10	10.00	2.76	0.45	11.31	2.99	1.10
15	13.90	4.72	1.10	16.29	5.36	2.38
20	20.13	8.33	2.30	24.29	9.84	5.32
25	30.63	15.28	4.70	38.42	18.91	10.53
30	49.57	29.62	11.10	65.30	38.70	25.27
35	86.61	61.64	26.64	119.72	84.83	63.62
40	166.97	141.10	71.43	240.73	203.00	178.90
45	366.17	367.17	225.00	555.11	556.11	460.00

これらの値は基礎底面上における接地圧の平均値  $\frac{\bar{\sigma}_z}{c}$  を用いて次のように求めた。

$$\left. \begin{aligned} N_{cr} &= \frac{\bar{\sigma}_z}{c} \left( \frac{\gamma R}{c} = 0.0, \frac{p_0}{c} = 0.0 \right) \\ N_{qr} &= \frac{\bar{\sigma}_z}{c} \left( \frac{\gamma R}{c} = 0.0, \frac{p_0}{c} = 1.0 \right) - N_{cr} \\ N_{rr} &= \frac{\bar{\sigma}_z}{c} \left( \frac{\gamma R}{c} = 1.0, \frac{p_0}{c} = 0.0 \right) - N_{cr} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$N_{rr}$  の値を(11)式中の3番目の式で与えたことについては問題がある。なぜならば  $\frac{\bar{\sigma}_z}{c}$  の値は  $\gamma R/c$  の値に対して一定ではないからである。これについては後で考察することにする。ここで興味あるのは次式で示される二次元基礎の支持力の場合の  $N_c$  と  $N_q$  との関係式と同様の次式<sup>1)</sup>が成立することである。

$$N_{cr} = \cot \phi (N_{qr} - 1) \quad (12)$$

Fig. (a), (b), (c)は本計算により得られた各支持力係数 (Table 1) を  $\phi$  に対して示し、既存の各研究者による計算値と対比したものである。(a)は  $N_{cr}$  に、(b)は  $N_{qr}$  に、(c)は  $N_{rr}$  についてのものである。図によれば一般に  $N_{cr}$  については  $N_{qr}$  や  $N_{rr}$  についてより多くの研究者による計算値があり、これまで主に  $N_{cr}$  の値が熱心に追求されてきたことが伺える。

Fig. 7(a)によれば基礎底が滑な場合、本計算値はCoxら<sup>2)</sup>や山口<sup>12)</sup>の計算値と大変良く一致していることがわかる。また同図には示していないが、本計算値は  $\phi=0$  に対するShield<sup>10)</sup>の計算値や  $\phi \geq 0$  に対する勝見<sup>6)</sup>の計算値とも大変良く一致していた。

基礎底が粗な場合の他の研究者による計算値は  $\phi=0$  に対するEasonら<sup>4)</sup>のもの、 $\phi \geq 0$  に対する勝見<sup>6)</sup>のものしかないようである。この場合も本計算値はこれら両者の値と大変良く一致していた。

Fig. 7(b)によれば基礎底が滑な場合の本計算値は山口<sup>12)</sup>のものと大変良く一致していることがわかる。基礎底が粗な場合の既存の計算値は見当たらないので比較のしようがないが、本計算値の  $N_{qr}$  と  $N_{cr}$  の間には(12)式の関係が成立するので計算結果の妥当性はあるものと思われる。

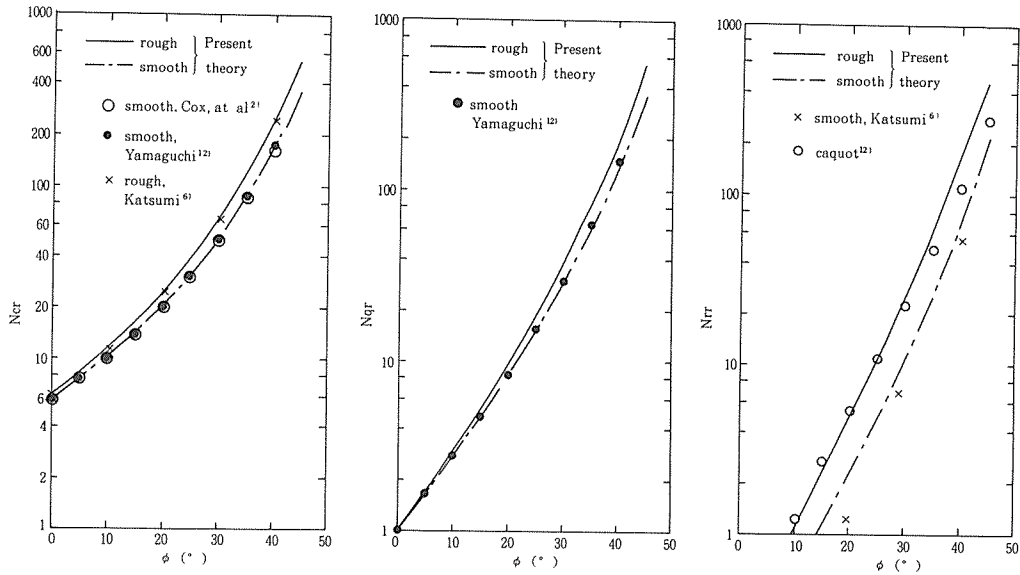


Fig. 7 Comparison of values of bearing capacity factors,  $N_{cr}$ ,  $N_{qr}$  and  $N_{rr}$  from present theory and values from other author's theories

Fig. 7(c)によれば基礎底が滑な場合  $\frac{\gamma R}{c} = 1.0$  として得られた計算値は  $\frac{\gamma R}{c} = \infty$  として得られた勝見<sup>6)</sup>のものと  $\phi > 30^\circ$  の範囲では比較的良好一致をしている。基礎底が粗な場合の  $N_{rr}$  は滑な場合の約 2 倍となっている。同図には二次元基礎に対して得られた Caquot の値  $N_q^*$  に形状係数 0.6 を乗じて三次元化をはかった値  $0.6N_q^*$  をも示している。この値は実験値と比較的良好一致するといわれているが、本計算値と対比してみると  $\phi > 30^\circ$  の範囲では  $\frac{\gamma R}{c} = 1.0$  に対して得られた基礎底が粗な場合と滑な場合の計算値の間にあることがわかる。

したがって、上述したように  $N_{rr}$  は  $\frac{\gamma R}{c}$  の値により変化するが  $\frac{\gamma R}{c} = 1.0$  として得られる値はかなり合理的な値であることが伺える。

## 摘 要

本論文は  $c-\phi$  地盤上における円形基礎の極限支持力を三次元軸対称条件下に塑性論的に解析したものである。土は Mohr-Coulomb の破壊規準に従う剛完全塑性体とし、応力場は Haavon Kármán の条件を満足すると仮定した。

解析結果によれば支持力係数は土の内部摩擦角  $\phi$  と基礎底の粗度の関数として表した。本解析結果は既存の他の研究者による計算結果とも大変良く一致していることが確かめられた。

## 引用文献

1. Caquot, A. and Kerisel, J. (1949). *Traite de Mechanique des Sols*. Gauthier-Villars (Paris).
2. Cox, A.D., Eason, G. and Hopkins, H.G. (1961). Axially Symmetric Plastic Deformation in Soils. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London. A.* **254**. 1—45.
3. Cox, A.D. (1961). Axially-Symmetric Plastic Deformation in Soils. II Indentation of Ponderable Soils. *Int. J. of Mech. and Sci.* **4**. 381—386.
4. Eason, G. and Shield, R.T. (1960). The Plastic Indentation of a Semi Infinite Solid by a Perfectly Rough Circular Punch. *Zeitschrift für Angewandte Math. und Phys.* **XI**. 33—43.
5. 藤川武信・甲本達也 (1978). 地面へのコーン貫入に関する三次元的解析. *農土論集*, **74**. 59—66.
6. 勝見 雅 (1976). 中間主応力に注目した円形剛基礎支持力に関する研究. *土木論集*, **252**. 73—85.
7. 甲本達也 (1980). 粘性土地盤におけるコーンの貫入に関する塑性論的研究. *佐賀大学農学彙報*, **48**. 1—63.
8. Koumoto, T., Meyerhof, G.G. and Sastry, V.V.R.N. (1985). Ultimate Bearing Capacity of Axially Loaded Piles based on Three-Dimensinal Analysis. *Int. J. Computers and Geotechnics*. **1**. 181—194.
9. Meyerhof, G.G. (1955). Influence of Roughness of Base and Ground-Water Conditions on the Ultimate Bearing Capacity of Foundations. *Geotechnique*. **III**. 227—242.
10. Shield, R.T. (1955). On the Plastic Flow of Metals under Conditions of Axial Symmetry. *Proc. Roy. Soc. of London. A.* **233**. 267—287.
11. Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley and Sons. 125.
12. 山口柏樹. (1977). *土質力学*. 技報堂. 283.